Μάθημα 17ο 21/05/2020

«Κεφάλαιο 5ο»

Ορισμός: Μια καμπύλη $\gamma : [a, \beta] \to \mathbb{C}$ θα ονομάζεται κατά τμήματα C^1 αν υπάρχει διαμέριση $a = t_0 < t_1 < \dots < t_{m-1} = \beta$, $m \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε

$$\underbrace{\gamma_i = \gamma_{|[t_{i-1}, t_i]}}_{\text{περιορισμοί της καμπύλης}}, \quad i = 1 \dots m$$

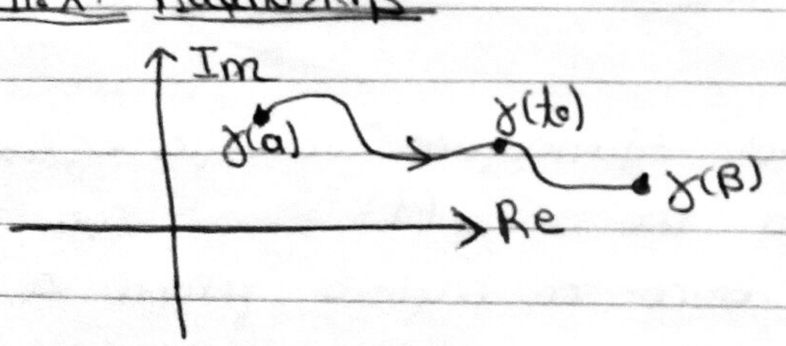
να είναι C^1 συνεχώς διαφορίσιμες.

Σχόλιο:
- Εμείς όμως θα ασχοληθούμε με καμπύλες $\gamma : I \to \mathbb{C}$, με $t \in I \subset \mathbb{R}$: διάστημα οι οποίες είναι συνεχείς. Δηλαδή αν

$$\gamma(t) = x(t) + i y(t) \longleftrightarrow \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

$x(t)$, $y(t)$ συνεχείς συναρτήσεις (πραγματικές)

π.χ. καμπύλης



$\gamma : [a, \beta] \to \mathbb{C}$ (Παραμετρική καμπύλη) στο $\mathbb{C}$

Ορισμός: η γ: συνεχής καμπύλη, δηλαδή:

$\forall\, t_0 \in [a, \beta]$: γ συνεχής στο $t_0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0\ \forall t\in[a,\beta],\ |t-t_0|<\delta : |\gamma(t)-\gamma(t_0)|<\varepsilon$

• Εάν $\forall\, t\in[a,\beta]$: $\underbrace{\gamma(t)}_{\in \mathbb{C}} = \underbrace{x(t)}_{\in R} + i\underbrace{y(t)}_{\in R}$ συνεχής

στο $t_0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall t\in[a,\beta],\ |t-t_0|<\delta : \begin{cases} |x(t)-x(t_0)|<\varepsilon \\ |y(t)-y(t_0)|<\varepsilon \end{cases}$$

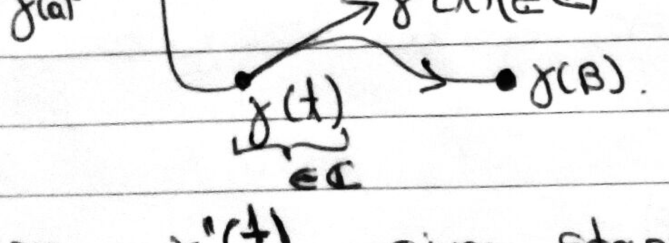
Ορισμός :

$\gamma:[a,\beta]\to\mathbb{C}$ είναι $C^1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \exists\, \gamma'(t) = \lim_{s\to t} \frac{\gamma(t)-\gamma(s)}{t-s} \in \mathbb{C},\ \forall t\in[a,\beta]$$

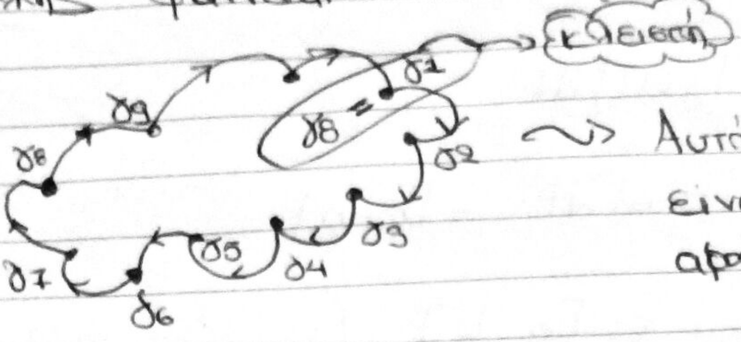
Και η $\gamma':[a,\beta]\to\mathbb{C}$ είναι συνεχής

Έστω η καμπύλη του σχήματος στο μιγαδικό επίπεδο.



όπου $\gamma'(t)$ είναι εφαπτόμενο διάνυσμα στην καμπύλη [Παρόλο που το $\gamma'(t)$ είναι ένα σημείο του R^2 , αυτό το σημείο μπορώ να το παραστήσω με διάνυσμα.

Σχόλιο : Μπορεί η καμπύλη να μην είναι σε όλο το διάστημα διαφ/μη οπότε το ισχύω σε διαστήματα. Ένα παράδειγμα κατά τμήματα συνεχούς καμπύλης φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



Αυτή η καμπύλη είναι κλειστή αφού: $\gamma_8(\beta_8)=\gamma_1(a_1)$

όπου $\gamma=\gamma_1\oplus\dots\oplus\gamma_8$ με

$\gamma_i:[a_i,\beta_i]\to\mathbb{C},\ i=1,\dots,8$

και $\gamma_i\in C^1\ \forall i \Rightarrow$ **κατά τμήματα συνεχής.**

Μήκος καμπύλης $\gamma:[a,\beta]\to\mathbb{C}$, η οποία είναι C^1:

$$L(\gamma)=\int_a^\beta|\gamma'(t)|\,dt \quad \text{, όπου } |\gamma'(t)|\in\mathbb{R}$$

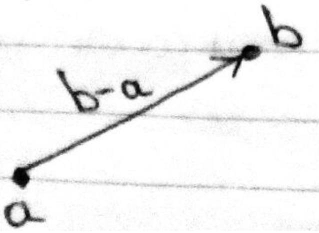
Αυτό το ολοκλήρωμα υπάρχει εάν η $\gamma'(t)$ είναι συνεχής [Αν η συνάρτηση συνεχής τότε και το απόλυτο της συνάρτησης είναι συνεχής].

- $L(\gamma)=\int_a^\beta|\gamma'(t)|\,dt\in[0,+\infty)$

Οι δύο καμπύλες που χρησιμοποιούμε στην πράξη:

1) Το ευθύγραμμο τμήμα

$\gamma(t)=a+t\cdot(b-a)$, $t\in[0,1]$, $a,b\in\mathbb{C}$, $a\neq b$



$$\gamma'(t)=\lim_{s\to t}\frac{\gamma(t)-\gamma(s)}{t-s}=$$

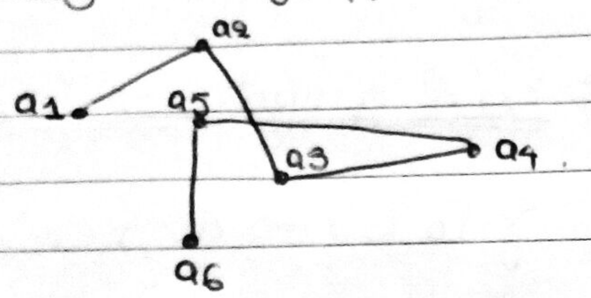
$$\lim_{s\to t} \frac{\cancel{(t-s)}(b-a)}{\cancel{t-s}} = b-a \neq 0$$ άρα <u>κανονική καμπύλη</u>

- $L(\gamma) = \int_0^1 |\gamma'(t)|\,dt$

$= \int_0^1 |b-a|\,dt = |b-a|$

➤ Θα γράφουμε $\gamma = [\underbrace{a}_{\in\mathbb{C}}, \underbrace{b}_{\in\mathbb{C}}]$ (καμπύλη ευθύγραμμο τμήμα)

<u>Πολυγωνική γραμμή</u> : (ένωση ευθύγραμμων τμημάτων)

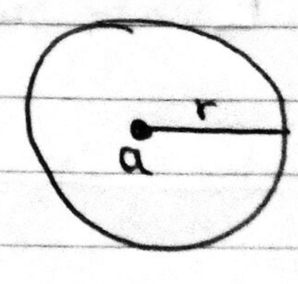


$\gamma = [a_1, a_2] \oplus \ldots + [a_5, a_6]$

2) <u>Κύκλος</u>

$\gamma(t) = a + re^{it}$, $a \in \mathbb{C}$, $r > 0$, $t \in [0, 2\pi]$

$\Leftrightarrow \gamma(t) - a = re^{it} \Rightarrow |\gamma(t) - a| = r$

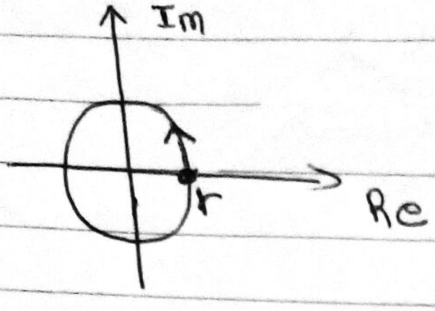


$$\tilde{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} Re\,a \\ Im\,a \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

η $\tilde{\gamma} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, είναι η αντίστοιχη καμπύλη στον $\mathbb{R}^2$

Για $a=0$ η $\gamma(t)=r\cdot e^{it}=r\cos t+r\cdot i\sin t$, $t\in[0,2\pi]$

είναι ο κύκλος κέντρου O ακτίνας $r>0$. (Σχήμα)



$r=\gamma(0)=\gamma(2\pi)$

$\gamma'(t)=r(-\sin t)+i\cdot r\cdot\cos t$

$\gamma'(t)=i(r\cos t+i\sin t\cdot r)$

Έχουμε όμως ότι:

$\frac{d}{dt}e^{it}=i\cdot e^{it}$

<< ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ ΚΑΜΠΥΛΗΣ >>

$\gamma(t)=\underbrace{u(t)}_{\in\mathbb{R}}+i\underbrace{v(t)}_{\in\mathbb{R}}$, $t\in[a,\beta]$, με $u,v:[a,\beta]\to\mathbb{R}$: συνεχής

Το ολοκλήρωμα της καμπύλης (όχι κάποιας συνάρτησης που ορίζεται στην καμπύλη, αυτό θα το δούμε παρακάτω) δίνεται από τον τύπο:

$$\int_a^\beta \gamma(t)dt=\int_a^\beta u(t)dt+i\int_a^\beta v(t)dt.$$

Αφού ξέρεις τις ιδιότητες των $\int_a^\beta u(t)dt$, $\int_a^\beta v(t)dt$ έχουμε τις ιδιότητες:

$$\int_a^\beta(\lambda\gamma_1+\mu\gamma_2)(t)\,dt=\lambda\int_a^\beta\gamma_1(t)dt+\mu\int_a^\beta\gamma_2(t)dt.$$

Άσκηση: Να κάνετε την απόδειξη

- $$\int_a^\beta \gamma(t)\,dt = \int_a^s \gamma(t)\,dt + \int_s^a \gamma(t)\,dt$$

Άσκηση: Να κάνετε την απόδειξη

- $\gamma : [a,\beta] \to \mathbb{C}$: C^1

$$\int_a^\beta \gamma'(t)\,dt = \gamma(\beta) - \gamma(a).$$

Τι θες; Γιατί;

Απόδειξη

$$\gamma(t) = \underbrace{u(t)}_{\in \mathbb{R}} + i\,\underbrace{v(t)}_{\in \mathbb{R}}, \quad t \in [a,\beta].$$

$$\gamma'(t) = \lim_{s\to t} \frac{\gamma(t)-\gamma(s)}{t-s}$$

$$= \lim_{s\to t} \frac{u(t)+iv(t)-u(s)-iv(s)}{t-s}$$

$$= \lim_{s\to t} \frac{u(t)-u(s)}{t-s} + i \lim_{s\to t} \frac{v(t)-v(s)}{t-s}$$

$$= \underbrace{u'(t)}_{\in \mathbb{R}} + i\,\underbrace{v'(t)}_{\in \mathbb{R}},$$

ΑΡΑ (ΑΧΑ[illegible]) : $\int_a^\beta \gamma'(t)\,dt \underset{\text{ορισμός}}{=\!=} \int_a^\beta u'(t)\,dt + i\int_a^\beta v'(t)\,dt$

$$\underset{\text{Θ.Θ.Α.Λ}}{=\!=} u(\beta)-u(a) + i\cdot(v(\beta)-v(a))$$

$$= \gamma(\beta) - \gamma(a).$$

Θεμελιώδες Θεώρημα

Ολοκληρωτικού λογισμού

Αποδεικνύεται επίσης η λεγόμενη τρ. ανισότητα:

$$\left|\int_a^\beta \gamma(t)\,dt\right| \le \int_a^\beta |\gamma(t)|\,dt$$

Απόδειξη

- Αν αυτό στα αριστερά είναι 0 τότε $\int_a^\beta |\gamma(t)|dt \geq 0$: ισχύει
- Αν αυτό στα αριστερά διάφορο του 0 :

$$\lambda = \frac{\left|\int_a^\beta \gamma(t)\,dt\right|}{\int_a^\beta \gamma(t)\,dt|}$$

- $\lambda = 1$

$$\left|\int_a^\beta \gamma(t)\,dt\right| = \lambda \int_a^\beta \gamma(t)\,dt$$

$$= Re\left(\lambda \int_a^\beta \gamma(t)\,dt\right) = Re\left(\int_a^\beta \lambda\gamma(t)\,dt\right)$$

$$= \int_a^\beta Re(\lambda\gamma(t))\,dt \le \int_a^\beta |\lambda\,\gamma(t)|\,dt = \int_a^\beta |\gamma(t)|\,dt$$

Π.χ. 5.1.2 (Να το λύσουμε ως ασκήσεις).

SOS (χρειάζεται για τα επόμενα).

$\gamma(t) = a + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$

[$\gamma'(t) = r \cdot i \cdot e^{it}$

$$\gamma'(t) = \lim_{s\to t} \frac{r\,e^{it} - re^{is}}{t-s} = r\lim_{s\to t} \frac{\cos t - \cos s}{t-s} +$$

$$+ r \cdot i \cdot \lim_{s\to t} \frac{\sin t - \sin s}{t-s} = r\cdot(-\sin t) + ri\cos t$$

$$= i \cdot r \cdot e^{it} \quad]$$

$$\int_0^{2\pi} (a+r e^{it})\, dt = \underbrace{a\int_0^{2\pi} 1\, dt}_{=2\pi} + r\cdot\int_0^{2\pi} e^{it}$$

Από ορισμό υπολογίζω το:

$$\int_0^{2\pi} e^{it} = \int_0^{2\pi} \cos t\, dt + i\int_0^{2\pi} \sin t\, dt$$

$$= 0 + i\cdot 0 = 0$$

Άρα: $\int_0^{2\pi} (a+r\cdot e^{it}) = a\cdot 2\pi$

$\boxed{\text{Άσκηση}}$ SOS

Δείξτε ότι: $\frac{d}{dt} e^{i\lambda t} = i\lambda\cdot e^{i\lambda t}$, $\lambda\in\mathbb{C}^*$

(Υπόδειξη):

$$\int_a^\beta e^{i\lambda t}\, dt = \int_a^\beta \frac{i\lambda\cdot e^{i\lambda t}}{i\lambda}\, dt \overset{(5\cdot 2)}{\underset{\text{γραμμικότητα}}{=}}$$

$$= \frac{1}{i\lambda}\int_a^\beta i\lambda\cdot e^{i\lambda t}\, dt$$

Θ.Θ.Α.Λ

$$\frac{1}{i\lambda}\left(e^{i\lambda\beta} - e^{i\lambda a}\right) = 0 \iff e^{i\lambda\beta} = e^{i\lambda a} \overset{*}{\iff}$$

αφού $\frac{1}{i\lambda} \neq 0$ αφού $\lambda\in\mathbb{C}^*$

$$\overset{*}{\iff} e^{i\lambda a}\left(e^{i\lambda(\beta-a)} - 1\right) = 0$$

$$\iff e^{i\lambda(\beta-a)} = 1, \text{ με } \lambda\in\mathbb{C}^*$$

$\iff \lambda(\beta-a) = 2\kappa\pi$ για κάποιο $\kappa\in\mathbb{Z}$

Γιατί ισχύει αυτό ??? → Άσκηση

Συνέχεια Μαθήματος 17ο | 21/05/2020
(Σχετίζεται με το ότι $e^{iz} = 1$)

<< Μιγαδικό Επικαμπύλιο ολοκλήρωμα >>

Ορισμός

Ονομάζουμε μιγαδικό ολοκλήρωμα της $f: K = \gamma([a,\beta]) \to \mathbb{C}$ η οποία είναι συνεχής, κατά μήκος της καμπύλης $\gamma: [a,\beta] \to \mathbb{C}$, C^1 (δηλ $\exists\ \gamma': [a,\beta] \to \mathbb{C}$ η οποία είναι συνεχής) είναι:

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^\beta \underbrace{\underbrace{f(\gamma(t))}_{\in \mathbb{C}}\underbrace{\gamma'(t)}_{\in \mathbb{C}}}_{\in \mathbb{C}} dt$$

Επομένως το ολοκλήρωμα αυτό ορίζεται όπως το ολοκλήρωμα καμπύλης αφού η $: t \longmapsto f(\gamma(t))\gamma'(t) \in \mathbb{C}$ είναι καμπύλη.

Σαν Άσκηση την Παρατήρηση 5.2.1

Σαν Άσκηση την Πρόταση 5.2.1 το "α" και το "β"